Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Hinweise für die Abiturientinnen und Abiturienten

Abiturprüfung **2002**

Haupttermin	**Grundkurs** M a t h e m a t i k
Bearbeitungszeit:	**240** Minuten
Hilfsmittel:	Funktionentafel mit mathematischem Formelanhang Taschenrechner (nicht programmierbar)
Hinweise:	Sie erhalten **zwei** Aufgaben.

Sie sind verpflichtet, die Ihnen vorgelegten **zwei** Aufgaben zu bearbeiten.

Verwenden Sie für die Reinschrift und den Entwurf je Aufgabe **einen neuen** Bogen.

Vermerken Sie auf **jedem Bogen** die Nummer der bearbeiteten Aufgabe.

Sie sind verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn (auf Anzahl der Blätter, Anlagen usw.) zu überprüfen.

Lösungen auf den Aufgabenblättern werden nicht gewertet.

M

Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(x) = -kx^3 + 3k^2x^2 \quad ; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

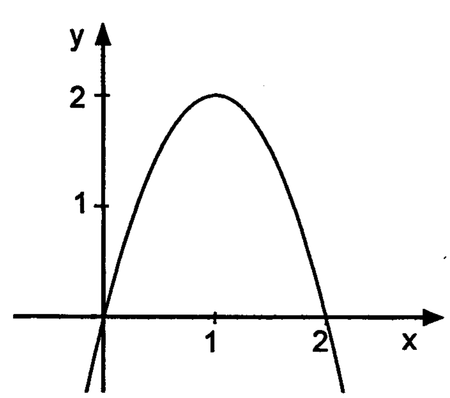
Ihr Schaubild sei C_k.

a) Untersuchen Sie C_1 auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente von C_1.
Zeichnen Sie C_1 für $-1 \leq x \leq 3{,}5$ (Längeneinheit 1 cm). (8 VP)

b) Zeigen Sie: Die drei Punkte des Schaubildes C_1 mit den x-Werten 2, -2 und 3 liegen auf einer Geraden.
Diese Gerade und C_1 schließen zwei Flächen ein.
Berechnen Sie den Inhalt der kleineren Fläche. (7 VP)

c) Für welche k liegt $B(3\,|\,-6)$ auf C_k?
Welches ist das kleinste a, so dass $B_a(3\,|\,a)$ auf einem Schaubild C_k liegt? (8 VP)

d) In der nebenstehenden Skizze ist das Schaubild der Ableitung g' einer Funktion g zu sehen.
Begründen Sie mithilfe des Bildes, dass das Schaubild von g einen Hochpunkt, einen Tiefpunkt und einen Wendepunkt mit positiver Steigung hat.



(7 VP)

Gegeben ist eine Funktion f durch

$$f(x)=\frac{8x}{x^2+4} \quad ; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuchen Sie K auf Symmetrie, Asymptoten, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte. (Der Nachweis einer hinreichenden Bedingung für Wendepunkte ist nicht verlangt.)
Zeichnen Sie K für $-6 \le x \le 6$.
Geben Sie den Wertebereich von f an. (10 VP)

b) Die Kurve K, die x-Achse und die Gerade $x=2$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A.
Berechnen Sie mithilfe der keplerschen Fassregel einen Näherungswert A_1 für A.
Einen Näherungswert A_2 für A erhält man, indem man K durch eine Parabel zweiter Ordnung annähert, die K im Punkt $P(2\,|\,2)$ berührt und durch den Ursprung geht.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Parabel.
Zeigen Sie, dass K diese Parabel im Ursprung berührt.
Berechnen Sie A_2. (10 VP)

c) Für jedes $t>0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x)=\frac{8x}{x^2+t^2} \quad ; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K_t.
Im Wendepunkt $W_t(t\sqrt{3}\,|\,\frac{2\sqrt{3}}{t})$ von K_t werden die Tangente und ihre Normale an K_t gelegt.
Sie schneiden aus der x-Achse eine Strecke aus.
Für welchen Wert von t wird die Länge dieser Strecke extremal?
Um welche Art von Extremum handelt es sich? (10 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

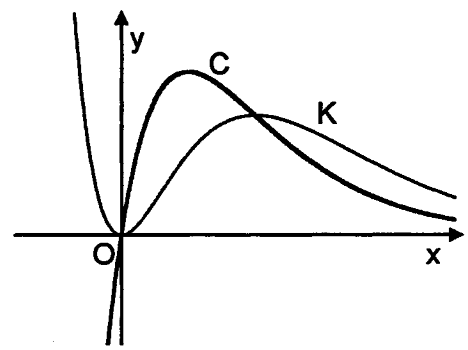
Abiturprüfung 2002 | Grundkurs **Mathematik** | Aufgabe **A 3**

Haupttermin | **Analysis**

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = 8x \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad g(x) = 4x^2 \cdot e^{-x} \quad ; \ x \in \mathbb{R}.$$

In der nebenstehenden Skizze sind die Schaubilder C und K dieser beiden Funktionen dargestellt.



a) Begründen Sie, dass C das Schaubild von f und K das von g ist.
Untersuchen Sie, ob der Hochpunkt von K und der Wendepunkt von C zusammenfallen. (10 VP)

b) Die Gerade $x = u$ mit $0 < u < 2$ schneidet das Schaubild von f im Punkt P und das Schaubild von g im Punkt R.
Für welchen Wert von u ist der Flächeninhalt des Dreiecks ORP am größten? (10 VP)

c) Für wissenschaftliche Versuche werden Fruchtfliegen benötigt. Diese vermehren sich so, dass sich der Bestand B(t) zur Zeit t (t in Tagen) beschreiben lässt durch

$$B(t) = B_0 \cdot e^{kt}.$$

Die Zucht beginnt mit 100 Fliegen.
Bestimmen Sie die Konstanten B_0 und k, wenn nach 5 Tagen 250 Fliegen gezählt werden.
Wie viele Fliegen kann man nach 8 Tagen höchstens entnehmen, ohne dass der Bestand unter den nach 7 Tagen fällt?
Zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 werden 90% der Fliegen entnommen.
Wie lange dauert es danach, bis der Bestand vom Zeitpunkt t_1 wieder erreicht ist, wenn keine weitere Entnahme erfolgt? (10 VP)

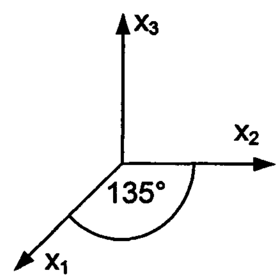
Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung 2002 | Grundkurs **Mathematik** | Aufgabe **B 1**

Haupttermin | **Analytische Geometrie**

Gegeben sind die Punkte $A(-1|6|1)$, $B(2|2|2)$, $C(0|7|-1)$, $P(0|6|6)$ und $Q(6|6|6)$.
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die durch die Punkte P und Q geht.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Unter welchem Winkel schneidet g die Ebene E?
Welchen Abstand hat $O(0|0|0)$ von E?
Bestimmen Sie die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 von E mit den Koordinatenachsen.
S_1, S_2, S_3 und O sind Eckpunkte eines Würfels.



Zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und den Würfel in ein Koordinatensystem ein (Längeneinheit 1 cm; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $\frac{1}{2}\sqrt{2}$).
(Teilergebnis: E: $x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$) (9 VP)

b) Gegeben ist eine Ebene durch die Eckpunkte P und Q und des Würfels aus Teilaufgabe a) und den Punkt $R(6|0|4)$.
Geben Sie den Schnittpunkt dieser Ebene mit der x_3-Achse an.
Die Ebene zerlegt den Würfel in zwei Teile.
Zeichnen Sie die Schnittfläche in das Bild aus Teilaufgabe a) ein.
Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumina der entstandenen Teilkörper. (6 VP)

c) Gegeben ist die Geradenschar $h_r: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $t, r \in \mathbb{R}$.

Die durch den Ursprung gehende Raumdiagonale des Würfels aus Teilaufgabe a) schneidet eine Gerade der Schar in einem Punkt S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S und eine Gleichung dieser Geraden. (7 VP)

d) Gegeben ist die Gerade $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

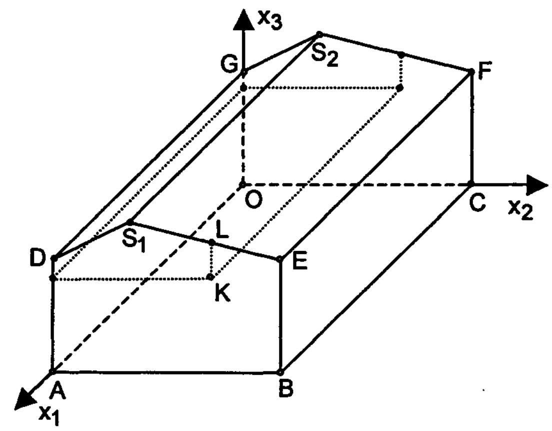
Zeichnen Sie k in das vorhandene Koordinatensystem ein.
Zeigen Sie, dass k parallel zur x_1x_3-Ebene verläuft.
Weisen Sie nach: Die Gerade k zerlegt das Dreieck $S_1S_2S_3$ aus Teilaufgabe a).
Berechnen Sie die Flächeninhalte der Teilflächen. (8 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung 2002 | Grundkurs **Mathematik** | Aufgabe **B 2**

Haupttermin | **Analytische Geometrie** | Blatt **1 - 2**

Nebenstehende Figur zeigt das Schrägbild einer 50 m langen und 30 m breiten Lagerhalle, deren Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt. Entsprechende Gebäudekanten sind parallel. Die Dachkanten EF und DG befinden sich in 15 m Höhe. Die vordere Giebelspitze ist $S_1(50\,|\,10\,|\,20)$ (Angaben in Meter).



a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E, F, G und S_2 an.
Unter welchem Winkel schneiden sich die Dachkanten S_1D und S_1E?
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene H, in der die Dachfläche EFS_2S_1 liegt.
Berechnen Sie den Neigungswinkel dieser Dachfläche gegen die Grundfläche.
(Teilergebnis: $H: x_2 + 4x_3 = 90$) (7 VP)

b) Im Zuge von Umbauarbeiten wird die Heizungsanlage saniert und ein neuer, zur Grundfläche orthogonaler, zylinderförmiger Edelstahlkamin eingebaut.
Der Fußpunkt der Mittelachse des Kamins ist $P(10\,|\,25\,|\,0)$.
Der Punkt $T(10\,|\,24{,}75\,|\,18)$ liegt auf der Außenwand des Kamins.
Geben Sie den Durchmesser des Kamins an.
In diesem Punkt T ist eine Strebe angebracht, die den Kamin an der Dachfläche EFS_2S_1 befestigt. Sie verläuft senkrecht zu dieser Dachfläche.
Berechnen Sie die Länge der Strebe. (8 VP)

c) In 12,5 m Höhe wird parallel zur Grundfläche eine Zwischendecke eingezogen (vgl. Skizze).
Wie breit ist diese Zwischendecke, wenn die Punkte K und L den Abstand 4,5 m haben? (7 VP)

d) Neben der Lagerhalle steht ein kugelförmiger Tank mit Mittelpunkt $M(20\,|-10\,|\,7)$ und Radius $r = 4$ m. Der Tank ist auf geradlinigen Stelzen gelagert.
Eine dieser Stelzen ist im Punkt $Q(25\,|-15\,|\,0)$ verankert und zeigt zum höchsten Punkt des Tanks.
In welchem Kugelpunkt stützt diese Stelze den Tank?
Berechnen Sie die Länge dieser Stelze. (8 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung 2002 | Grundkurs **M a t h e m a t i k** | Aufgabe **B 3**

Haupttermin | **Analytische Geometrie**

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$,

die Ebene E: $3x_1 - 4x_2 = 30$

sowie die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(3\,|\,1\,|\,0)$ und dem Radius $r = 10$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der x_1x_2-Ebene.
Unter welchem Winkel schneidet g die x_1x_2-Ebene?
Zeigen Sie, dass g parallel zur Ebene E verläuft.
Welchen Abstand hat g von E?
Die Gerade g liegt in einer Ebene E*, welche senkrecht zu E ist.
Geben Sie eine Koordinatengleichung von E* an. (8 VP)

b) Die Kugel K schneidet E in einem Kreis k.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes von k.
Zeigen Sie, dass der Punkt $C(10\,|\,0\,|\,5\sqrt{2})$ auf dem Kreis k liegt.
Die Ebene T berührt die Kugel K im Punkt C.
Bestimmen Sie eine Gleichung von T.
Unter welchem Winkel schneiden sich E und T? (8 VP)

c) Weisen Sie nach, dass die Gerade g und die Kugel K keinen Punkt gemeinsam haben.
Wie lauten die Koordinaten des Punktes von K, der von g den kleinsten Abstand hat? (7 VP)

d) Die Punkte $P(-3\,|\,5\,|\,4)$ und $Q(0\,|\,1\,|\,3)$ liegen auf einer Kugel K*, deren Mittelpunkt sich auf der x_2-Achse befindet.
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der beiden Kugeln K und K*. (7 VP)